Analyse fréquentielle des signaux

TdS – Chapitre 1

I. Introduction

- Signal : représentation physique d'une info. à transmettre
- Bruit : Phénomène perturbant le signal.

	Formule	Energie fine (Ex : support borné)	Energie infinie (Ex : Périodiques)
Energie	$\boxed{E = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 \, dt} = \lim_{T_0 \to +\infty} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \lvert x(t)\rvert^2 \, dt$	$E \in \mathbb{R}$	$E \to \infty$
Puissance	$\boxed{P = \lim_{T_0 \to +\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \lvert x(t)\rvert^2 \, dt}$	$P = 0$	$P \in \mathbb{R}$ $\boxed{P = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \lvert x(t)\rvert^2 \, \mathrm{dt}}$ si périodique
Corrélation	$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t-\tau) \, dt$		$C_{xy}(\tau) = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot y^*(t-\tau) \, dt$
Rapport signal sur bruit	$R_{S/B} = \frac{P_{signal}}{P_{bruit}}$	$R_{S/B}(dB) = 10 \log\left(R_{S/B}\right)$	

II. Décomposition en série de Fourier (signal périodique)

Coefficients réels		Coefficients complexes
$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right)$		$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(jn \frac{2\pi}{T} t\right)$
$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt$	$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt$	$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \exp\left(-jn \frac{2\pi}{T} t\right)$

$$c_n = \begin{cases} \dfrac{a_n - jb_n}{2} & n > 0 \\ \dfrac{a_n + jb_n}{2} & n < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) \text{ réel} & c_{-n} = c_n^* & & \\ x(t) \text{ réel pair} & c_{-n} = c_n & \Rightarrow & b_n = 0 \\ x(t) \text{ réel impair} & c_{-n} = -c_n & \Rightarrow & a_n = 0 \end{cases}$$

III. Produit de convolution

1. Définition

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) \, d\tau$$

2. Propriétés

- Commutatif, associatif, distribution par rapport à +.
- Dirac élément neutre : $f(t) * \delta(t) = f(t)$
- Translation temporelle : $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$

IV. Transformée de Fourier

1. Définition

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}\,\mathrm{d}f = x(t) \leftrightarrow X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,\mathrm{d}t}$$

2. Condition d'existence

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$$

ou $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$ et cont. par morceaux et nb. fini. de disc.

3. Propriétés de la TF

Voir ci-contre

- Dualité : $X(t) \leftrightarrow x(-f)$
- Symétrie et parité : $x(t)$ imag.pur $\Leftrightarrow X(f) = -X(-f)$
  $x(t)$ réel $\Leftrightarrow X(f) = X(-f)$
  $x(t)$ réel pair $\Leftrightarrow X(f)$ réelle pair
  $x(t)$ réel impair $\Leftrightarrow X(f)$ imag.pur impaire
- Thm de Parseval : $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\,\mathrm{d}f$
  Conservation de l'énergie

V. Transformée de Laplace

1. Définition

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} X(s)e^{st}\,\mathrm{d}s = x(t) \leftrightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t} \quad s = \sigma + j2\pi f$$

2. Région de convergence et passage en Fourier

$RC = \{s \mid X(s) \text{ existe}\}$ $\quad$ $X(f)$ existe si $j2\pi f \in RC$

3. Propriétés de la TF et de la TL

Valable pour Fourier avec $s = j2\pi f$

- Linéarité : $ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(s) + bY(s)$
- Décalage temporel : $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}X(s)$
- Décalage fréquentiel : $e^{-s_0}x(t) \leftrightarrow X(s - s_0)$
- Changement d'échelle : $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right)$
- Dérivation : $\frac{\mathrm{d}^k x(t)}{\mathrm{d}t^k} \leftrightarrow s^k X(s) \underbrace{+\Sigma_{i=1}^{k-1} x^{(i)}(0^+)}_{\text{si Laplace}}$
- Intégration : $\int x(t)\,\mathrm{d}t \leftrightarrow \frac{X(s)}{s}$
- Théorème de Plancherel : $x(t) * y(t) \leftrightarrow X(s) \times Y(s)$
  $x(t) \times y(t) \leftrightarrow X(s) * Y(s)$